Διάλεξη 3η

01/03/2019

# Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι

(συνέχεια πρότασης)

$n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$

$\Rightarrow \bar{z}^{-n} \underset{\text{ορ}}{=} \frac{\bar{1}}{\overline{z^n}} = \frac{1}{\overline{z^n}} = \frac{1}{\bar{z}^n} = \bar{z}^{-n}$

(*) άρα $\bar{z}^n \cdot \bar{z}^{n-1} = \overline{z^n \cdot z^{n-1}} = \bar{1} = 1$.

δηλ. για $w = z^n$ : $\bar{w} \cdot \bar{w}^{-1} \underset{\text{προτ.}}{=} \overline{w w^{-1}} = \bar{1} = 1$.

---

## 1.3.9: Εκθετική συνάρτηση:

! Προσοχή: Υποθέτουμε ότι η ανάλυση πραγματικών συναρτήσεων (μιας πραγμ. μεταβλ.) είναι γνωστή, ειδικότερα οι συναρτήσεις $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sin, \cos, \tan: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και οι ιδιότητες.

Ορισμός: Για κάθε φανταστικό αριθμό $iy \in \mathbb{C}$, $y \in \mathbb{R}$ ορίζουμε τον μιγαδικό αριθμό $\boxed{\exp(iy) = e^{iy} = \cos y + i \sin y}$

Ο παραπάνω τύπος ονομάζεται Τύπος του Euler

Επισήμανση: Εδώ ο τύπος του Euler και η $e^{iy}$ εμφανίζεται ως ορισμός και όχι ως ιδιότητα μιας συνάρτησης $\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

• για $y=0$ ο τύπος του Euler: $e^{i0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$,

$e^{\pm i \frac{\pi}{2}} = \pm i \Rightarrow$

$\boxed{e^{i\pi/2} = i}$

$\boxed{e^{\pm i\pi} = -1}$

**Ιδιότητες:**

- Από την τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1,\ \alpha\in\mathbb{R}$$

Έχουμε $\boxed{|e^{iy}|=1,\ \forall y\in\mathbb{R}.}$ (i)

- Επειδή η $\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι άρτια συνάρτηση, ενώ η $\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι περιττή συνάρτηση ισχύει:

$$\overline{e^{iy}}=\overline{\cos y+i\sin y}=\cos y-i\sin y=\cos(-y)+i\sin(-y)$$
$$=e^{-iy}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{e^{iy}}=e^{-iy}}\ \text{(ii)}$$

- Εφόσον $\cos,\sin$ είναι $2\pi$-περιοδικές $\Rightarrow$

$$\boxed{e^{i(y+2k\pi)}=e^{iy},\ y\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z}}\Rightarrow$$
$$\boxed{e^{i2k\pi}=1,\ \forall k\in\mathbb{Z}.}\ \text{(iii)}$$

- Από

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

προκύπτει ότι:

$$e^{i(\alpha+\beta)}=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+$$
$$+i(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)=$$
$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$$
$$=e^{i\alpha}e^{i\beta},\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

(*) Η τελευταία αυτή ιδιότητα δικαιολογεί τον συμβολισμό $\cos y+i\sin y=e^{iy}\ (=\exp(iy))$

▶ Αφού βλέπουμε ότι η «χαρακτηριστική ιδιότητα» της εκθετικής συνάρτησης $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$e^{x_1+x_2} = e^{x_1} e^{x_2}$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει για φανταστικούς αριθμούς $iy \in \mathbb{C}$, $y \in \mathbb{R}$.

Από την $e^{i(y_1+y_2)} = e^{iy_1} e^{iy_2}$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ προκύπτει:

$e^{iny} = (e^{iy})^n$, $y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Επίσης $e^{i0y} = e^{i0} = 1 = (e^{iy})^0$ και

$$1 = e^{i0} = e^{i(y-y)} = e^{iy} e^{-iy} \Leftrightarrow e^{-iy} = \frac{1}{e^{iy}} = (e^{iy})^{-1}.$$

$$\Rightarrow e^{iy} \in \mathbb{C}^*.$$

$$\Rightarrow e^{i(-n)y} = e^{-iny} = (e^{iny})^{-1} = ((e^{iy})^n)^{-1} = (e^{iy})^{-n}.$$

$\Rightarrow \boxed{e^{iny} = (e^{iy})^n, \ \forall y \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{Z}}$ : τύπος de Moivre.

(*) Ο τύπος de Moivre διατυπώνεται και ως:

$$\boxed{\cos(ny) + i\sin(ny) = (\cos y + i \sin y)^n, \ \forall y \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

**Ορισμός:** Η συνάρτηση $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ με $\exp z = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, όπου $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Ονομάζεται εκθετική συνάρτηση (στο $\mathbb{C}$). Προφανώς, είναι επέκταση της εκθετικής συνάρτησης στο $\mathbb{R}$ ($e^x = e^{x+i0} = e^x e^{i0} = e^x \cdot 1$) και έχει την ιδιότητα: $\boxed{e^{z+w} = e^z e^w, \ \forall z, w \in \mathbb{C}}$

αφού για $z = x+iy$, $w = a+ib$, έχουμε

$$e^{z+w} = e^{x+iy+a+ib} = e^{(x+a)+i(y+b)} = \underbrace{e^{x+a}}_{=e^{x}e^{a} \text{ εκθ. στο } \mathbb{R}} \underbrace{e^{i(y+b)}}_{=e^{iy}e^{ib}}$$

Αντίστοιχα προκύπτουν ότι: α) $e^{-z} = \frac{1}{e^{z}}$, β) $e^{nz} = (e^{z})^{n}$,

γ) $e^{z-w} = \frac{e^{z}}{e^{w}}$, $z,w \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$,

δ) $e^{z+2k\pi i} = e^{z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

} αποδείξτε τα (άσκηση!!!)

---

**Πολική μορφή μιγαδικών αριθμών:** (είναι σημαντική λόγω μορφής παραλληλισμού στο $\mathbb{C}$ σε αντιστοιχία με το $\mathbb{R}^2$)

Αρχικά κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (με καρτεσιανές συντεταγμένες $x,y \in \mathbb{R}$) σε πολικές συντεταγμένες $(r,\phi) \in (0,\infty) \times (-\pi,\pi]$ μέσω του "1-1" και επί μετασχηματισμού:

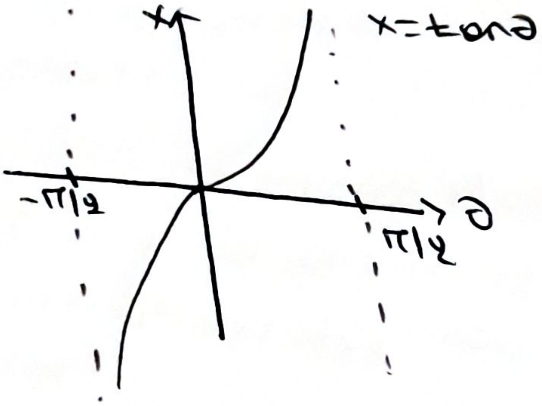
$$(0,\infty) \times (-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$
$$(r,\phi) \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}$$

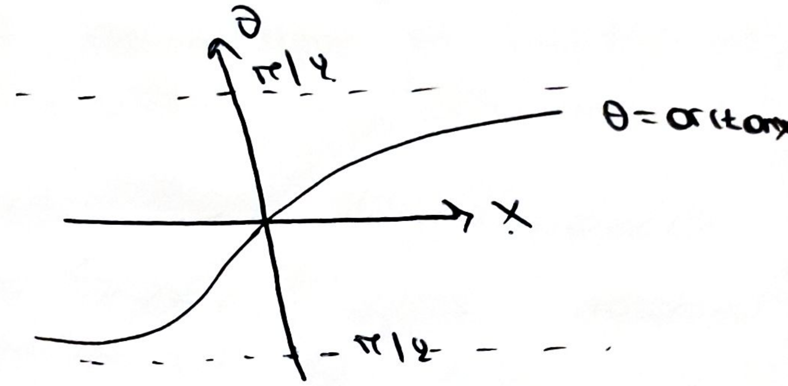
Με τον αντίστροφο μετασχηματισμό:

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to (0,\infty) \times (-\pi,\pi]$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow (r,\phi) \text{ όπου: } r = \sqrt{x^2+y^2}$$

και
$$\phi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & x>0 \\ \pi/2, & x=0,\ y>0 \\ \pi + \arctan\frac{y}{x}, & x<0,\ y>0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x=0,\ y<0 \\ -\pi + \arctan\frac{y}{x}, & x<0,\ y<0 \end{cases}$$

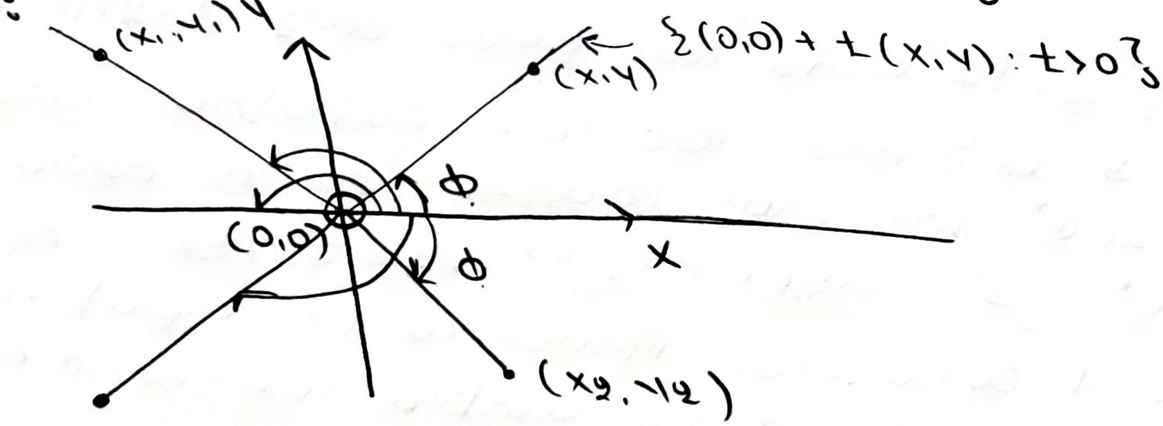
όπου $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι η αντίστροφη της $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$.




Γεωμετρικά: Σε κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ αντιστοιχεί μια μοναδική, κυρτή, προσανατολισμένη γωνία $\phi \in (-\pi,\pi)$ με κορυφή το O από τον θετικό ημιάξονα των πραγματικών: $\{(x,0) = (0,0) + x(1,0) : x>0\}$ προς τον θετικό ημιάξονα $\{t(x,y) : t>0\}$

Σχηματικά:




Άσκηση: Δείξτε ότι ο μετασχ. καρτεσιανές → πολικές $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to (0,\infty) \times (-\pi,\pi]$ είναι "1-1" και επί και αν $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}$ είναι ο μετασχ. αυτός, τότε ο αντίστροφος δίνεται από τους πιο πάνω τύπους.

↳ Αφού υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοίχιση του $\mathbb{C}^*$ με το $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ προκύπτει ότι υπάρχει ο 1-1 και επί μετασχηματισμός από το $\mathbb{C}^*$ στο $(0,\infty)\times(-\pi,\pi]$ του οποίου ο αντίστροφος είναι ο $z = x+iy = (x,y) =$
$= (r\cos\phi, r\sin\phi)$

$= r\cos\phi + ir\sin\phi = re^{i\phi}$, $(r,\phi)\in(0,\infty)\times(-\pi,\pi]$.
δηλαδή $z = re^{i\phi}$, $\forall z\in\mathbb{C}^*$ με $(r,\phi)\in(0,\infty)\times(-\pi,\pi]$
επειδή $z\to(r,\phi)$ μονοσήμαντα και $|z| = |re^{i\phi}| = |r||e^{i\phi}|$
$= |r| = r$.

προκύπτει ότι $z = |z|e^{i\phi}$. Επίσης λόγω της $2\pi i$-περιόδου της εκθετικής συνάρτησης: $e^{z+2k\pi i} = e^z$, $\forall z\in\mathbb{C}$
$\forall z\in\mathbb{C}^*$ ισχύει και $z = |z|e^{i\phi} = |z|e^{i(\phi+2k\pi)}$, $k\in\mathbb{Z}$ και $\phi\in(-\pi,\pi]$

Ορισμός: Το σύνολο των γωνιών $\boxed{\arg z = \phi + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}}$ και $\phi$ να δίνεται πιο πάνω, ονομάζεται όρισμα του $z\in\mathbb{C}^*$ και είναι μοναδικό υπό την έννοια ότι $\boxed{\forall z\in\mathbb{C}^*, \exists!\ \arg z\in(-\pi,\pi] \Leftrightarrow \arg z = \phi = \operatorname{Arg} z}$, το οποίο $\operatorname{Arg} z = \phi$ ονομάζεται πρωτεύουσα (ή κύρια) τιμή του ορίσματος $\arg z$ ή για συντομία πρωτεύον ή κύριο όρισμα του $z\in\mathbb{C}^*$.

(*) Το $\arg z$ μπορεί να γραφεί και ως σύνολο των τιμών του, δηλ. $\arg z = \{\phi + 2k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$
$= \{\operatorname{Arg} z + 2k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$

και οι τιμές αυτές είναι οι τιμές της πλειονοσήμαντης συνάρτησης $\arg z$, $z\in\mathbb{C}^*$, της οποίας ο πρωτεύων κλάδος είναι η συνάρτηση $z\to\operatorname{Arg} z$, $z\in\mathbb{C}^*$.

$\Rightarrow$

$\Rightarrow z \in \mathbb{C}^* : z = |z| e^{i \overbrace{\arg z}^{= \mathrm{Arg}\, z + 2\kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}}} = |z| \underbrace{e^{i(\mathrm{Arg}\, z + 2\kappa\pi)}}_{= e^{i \mathrm{Arg}\, z} \underbrace{e^{i 2\kappa\pi}}_{= 1}} =$

$= |z| e^{i \mathrm{Arg}\, z}$

<u>Στη πράξη</u>: $z = re^{i\theta}$ με $r > 0$ και $\theta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow r = |z|$ και $\theta = \arg z \Leftrightarrow$

$\theta = \arg z = \mathrm{Arg}\, z + 2\kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}$ και αν $z = re^{i\theta}$ με $r > 0$ και $\theta \in (-\pi, \pi] \Leftrightarrow r = |z| \wedge \theta = \mathrm{Arg}\, z$.

Από το πολυσήμαντο του $\arg z$ προκύπτει και ότι $z_1 = z_2 \Leftrightarrow z = |z_1| e^{i \arg z_1} = |z_2| e^{i \arg z_2} \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \wedge \underbrace{\arg z_1 = \arg z_2}_{\Leftrightarrow \mathrm{Arg}\, z_1 = \mathrm{Arg}\, z_2}$.

<u>Ορισμός</u>: Η πολική μορφή μιγαδικού $z \in \mathbb{C}^*$ είναι η $z = |z| e^{i \arg z}$ όπου $|z|$ είναι η απόλυτη τιμή του και $\arg z$ το όρισμά του.

(*) Η σημασία της για την μιγαδική ανάλυση, οφείλεται στην υπέροχη πράξη στο $\mathbb{C}^*$, έτσι όπως ερμηνεύεται γεωμετρικά:

↳ $\underbrace{\underbrace{z_1}_{\neq 0} \cdot \underbrace{z_2}_{\neq 0}}_{\neq 0} = |z_1| e^{i \arg z_1} \cdot |z_2| e^{i \arg z_2} = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)}$

$= |z_1 z_2| e^{i \arg(z_1 z_2)}$

$\Rightarrow$ <u>Γεωμετρικά</u>: η θέση στο μιγαδικό επίπεδο του γινομένου 2 μιγ. αριθμών $(\neq 0)$ βρίσκεται αν πολλαπλασιάσουμε τις απόλυτες τιμές τους, το οποίο δίνει την απόλυτη τιμή του γινομένου, και στρέψουμε το όρισμα του ενός κατά το όρισμα του άλλου.

(*) Στις σημειώσεις έχει κάποια λάθη και <u>ασκήσεις</u> κακώς θα ήταν να γίνουν όλες. + επαναλ. τα προηγ.

→ Ασκήσεις των A27 (εκτός από κάποιες που είναι αρκετά γνωστές.)